

11. Point Operations

Was sind Punktoperationen?

Als Punktoperationen bezeichnet man Operationen auf Bildern, die nur die Werte der einzelnen Bildelemente betreffen und keine Änderungen der Größe, Geometrie oder der lokalen Bildstruktur nach sich ziehen. Jeder neue Pixelwert $I'(u,v)$ ist ausschließlich vom ursprünglichen Pixelwert $I(u,v)$ an der selben Position abhängig und von den Werten anderer, insbesondere Pixel in der Umgebung, unabhängig. Der neue Pixelwert wird durch eine Funktion $f()$ bestimmt: $I'(u,v) \leftarrow f(I(u,v))$ bzw. $a' \leftarrow f(a)$. Dabei kann die Funktion f beliebiger Natur sein, darf jedoch ausschließlich von den Eingangsgrößen und eventuellen Konstanten abhängen. Die Klasse der Punktoperatoren unterteilt sich in 2 Unterklassen: **homogene** und **inhomogene** Punktoperatoren. Wenn die Funktion $f()$ unabhängig von den Bildkoordinaten (für jede Bildposition gleich) ist, bezeichnet man die Operation als homogen. Typische Beispiele für homogene Punktoperationen sind: Änderungen von Kontrast und Helligkeit, Invertieren von Bildern, Quantisieren der Bildhelligkeit in Stufen, Schwellwertbildung, Gammakorrektur, Farbtransformationen und dergleichen. Eine inhomogene Punktoperation $g(x,u,v)$ berücksichtigt zusätzlich die Bildkoordinaten (u,v) :

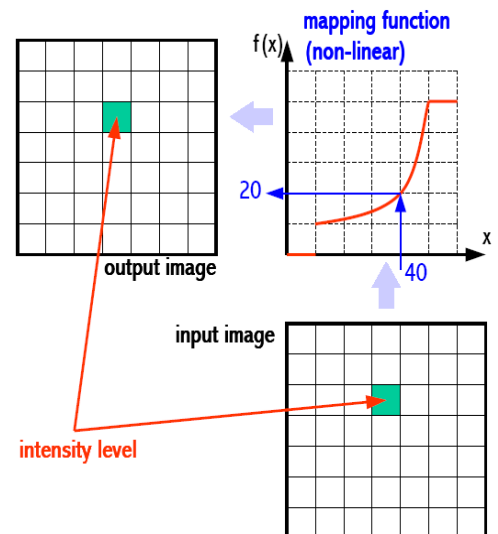
$$I'(u,v) \leftarrow g(I(u,v), u, v).$$

Affine Punktoperatoren bilden eine Unterklasse der homogenen Punktoperatoren. Sie lassen sich durch eine lineare Beziehung in Abhängigkeit des Wertes des zu betrachtenden Pixels ausdrücken:

$$I'(u,v) \leftarrow a \cdot I(u,v) + b.$$

Dabei sind $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig zu wählende Konstanten. Je nach Wahl dieser Konstanten entstehen Operatoren zur Helligkeitsveränderung ($a=1, b \neq 0$) oder Kontrastveränderung ($a \neq 1$).

Die Abbildungsfunktion (engl. *mapping function*) kann linear, stufenweise linear oder auch nichtlinear sein. Jedem Pixelwert im Eingangsbild wird entsprechend der Abbildungsfunktion ein Helligkeitswert im Ausgangsbild zugewiesen. Im Beispiel rechts ist eine nichtlineare Abbildungsfunktion zu sehen, die dem Eingangswert 40 den Ausgangswert 20 zuordnet. Die Abbildungsfunktion wird auch als **Kennlinie** bezeichnet.



Identitätsfunktion und Invertierung

Die einfachste Abbildungsfunktion ist die **Identitätsfunktion**, alle Werte behalten denselben Wert, die Kennlinie verläuft von links unten nach rechts oben. Die **Invertierung** ist eine einfache affine Punktoperation, die einerseits die Ordnung der Pixelwerte (durch Multiplikation mit -1) umkehrt und andererseits durch Addition eines konstanten Intensitätswerts dafür sorgt, dass das Ergebnis innerhalb des erlaubten Wertebereichs bleibt. Für ein Bild $I(u,v)$ mit dem maximalen Wertebereich $[0,q]$ ist die zugehörige Operation daher: $I'(u,v) \leftarrow -I(u,v) + q = q - I(u,v)$.



Schwellwertoperation

Eine Schwellwertoperation (engl. *thresholding*) ist eine spezielle Form der Quantisierung, bei der die Bildwerte in zwei Klassen p_0 und p_1 getrennt werden, abhängig von einem vorgegebenen **Schwellwert** (engl. *threshold value*) p_{th} :

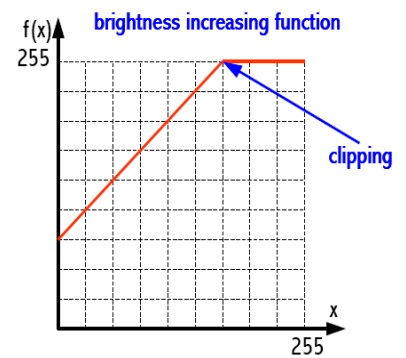
$$I'(u,v) \leftarrow f_{th}(I(u,v)) = \begin{cases} p_0 & \text{für } I(u,v) < p_{th} \\ p_1 & \text{für } I(u,v) \geq p_{th} \end{cases}$$



wobei $0 < p_{th} \leq q$. Eine häufige Anwendung ist die Binarisierung von Grauwertbildern mit $p_0 = 0$ und $p_1 = 1$.

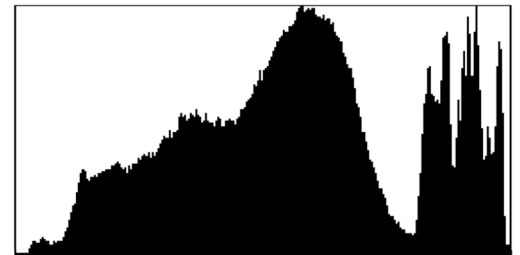
Kontrast und Helligkeit

Will man den Kontrast in einem Bild um 50% (d. h. um den Faktor 1.5) erhöhen, lässt sich als Punktoperation so ausdrücken: $I'(u,v) \leftarrow I(u,v) \cdot 1.5$. Bei der Umsetzung von Bildoperationen muss natürlich berücksichtigt werden, dass der vorgegebene Wertebereich für Bildpixel beschränkt ist (z. B. 0...255 bei 8-Bit-Grauwertbildern) und die berechneten Ergebnisse möglicherweise außerhalb dieses Wertebereichs liegen. Um das zu vermeiden, werden alle höheren Ergebniswerte auf den Maximalwert 255 begrenzt. Dies wird als **Clipping** bezeichnet. Genauso müssen auch die Ergebnisse nach „unten“ durch die Anweisung auf den Minimalwert 0 begrenzt werden, um zu verhindern, dass Pixelwerte negativ werden. Dieser Vorgang ist bei allen affinen Punktoperationen notwendig.



Histogramm

Histogramme sind Bildstatistiken und ein Hilfsmittel, um Eigenschaften von Bildern zu beurteilen. Zum Beispiel sind Belichtungsfehler, die bei der Aufnahme von Bildern entstehen, im Histogramm leicht zu erkennen. Moderne Digitalkameras bieten die Möglichkeit, das Histogramm eines gerade aufgenommenen Bildes anzuzeigen, da Belichtungsfehler durch nachfolgende Bearbeitungsschritte nur schwer korrigiert werden können. Neben Aufnahme Fehlern können aus Histogrammen aber auch Rückschlüsse auf Verarbeitungsschritte gezogen werden, denen ein Digitalbild unterzogen wurde.

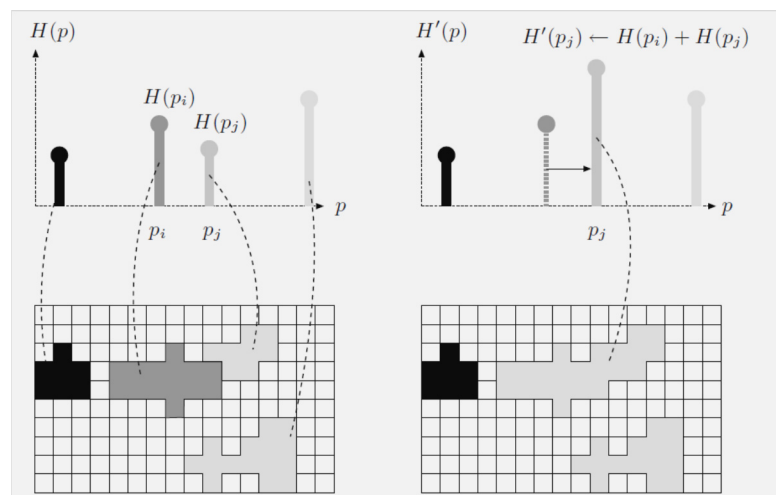


Histogramme sind Häufigkeitsverteilungen und Histogramme von Bildern beschreiben somit die Häufigkeit der einzelnen Intensitätswerte im Bild. Formal betrachtet ist ein Histogramm eine Datenstruktur, die jedem möglichen Wert x eines Pixels einer bestimmten Grauwert- bzw. Farbrepräsentation eine Häufigkeit zuordnet. Das Histogramm H eines Graustufenbildes I ist wie folgt definiert: $H(x) = \text{card}\{(u,v) \mid I(u,v)=x\}$. Für jedes $x \in \{0, \dots, q\}$ wird somit die Anzahl derjenigen Pixel (u,v) berechnet, deren Grauwert $I(u,v)$ gleich x ist (card bezeichnet die Anzahl der Elemente einer Menge). Auf diese Weise berechnet das Histogramm, wie oft ein Grauwert x in einem Graustufenbild vorkommt. Dies wird in einem zweidimensionalen Plot dargestellt, wobei die horizontale Achse die im Bild vorkommenden Grauwerte (z.B. 0...255) bezeichnet und die vertikale Achse die Häufigkeit des entsprechenden Grauwertes im Bild.

Histogramme sind Häufigkeitsverteilungen und Histogramme von Bildern beschreiben somit die Häufigkeit der einzelnen Intensitätswerte im Bild. Formal betrachtet ist ein Histogramm eine Datenstruktur, die jedem möglichen Wert x eines Pixels einer bestimmten Grauwert- bzw. Farbrepräsentation eine Häufigkeit zuordnet. Das Histogramm H eines Graustufenbildes I ist wie folgt definiert: $H(x) = \text{card}\{(u,v) \mid I(u,v)=x\}$. Für jedes $x \in \{0, \dots, q\}$ wird somit die Anzahl derjenigen Pixel (u,v) berechnet, deren Grauwert $I(u,v)$ gleich x ist (card bezeichnet die Anzahl der Elemente einer Menge). Auf diese Weise berechnet das Histogramm, wie oft ein Grauwert x in einem Graustufenbild vorkommt. Dies wird in einem zweidimensionalen Plot dargestellt, wobei die horizontale Achse die im Bild vorkommenden Grauwerte (z.B. 0...255) bezeichnet und die vertikale Achse die Häufigkeit des entsprechenden Grauwertes im Bild.

Hauptaufgabe eines Histogramms ist es, bestimmte Informationen über ein Bild in kompakter Weise sichtbar zu machen. Gibt es eine Möglichkeit, das Originalbild aus dem Histogramm allein zu rekonstruieren, d. h., kann man ein Histogramm irgendwie "invertieren"? Natürlich nicht, weil viele unterschiedliche Bilder – jede unterschiedliche Anordnung einer bestimmten Menge von Pixelwerten – genau das gleiche Histogramm aufweisen.

Die Auswirkungen von Punktoperationen auf das Histogramm sind einfach vorherzusehen. Eine Erhöhung der Bildhelligkeit verschiebt beispielsweise das gesamte Histogramm nach rechts, durch eine Kontrasterhöhung wird das Histogramm breiter, das Invertieren des Bildes bewirkt eine Spiegelung des Histogramms usw. Obwohl diese Vorgänge einfach erscheinen, ist es sinnvoll den Zusammenhang zwischen Punktoperationen und den dadurch verursachten Veränderungen im Histogramm nochmals zu verdeutlichen. Wie die nebenstehende Grafik zeigt, gehört zu jedem Eintrag (Balken) im Histogramm an der Stelle p die Menge all jener Bildelemente, die genau den Pixelwert p aufweisen. Wird infolge einer Operation



eine bestimmte Histogrammlinie verschoben, dann verändern sich auch alle Elemente der zugehörigen Pixelmenge. Was passiert also, wenn aufgrund einer Operation zwei bisher getrennte Histogrammlinien zusammenfallen? – die beiden zugehörigen Pixelmengen vereinigen sich und der gemeinsame Eintrag im Histogramm ist die Summe der beiden bisher getrennten Einträge. Die Elemente in der vereinigten Menge sind ab diesem Punkt nicht mehr voneinander unterscheidbar oder trennbar, was uns zeigt, dass mit diesem Vorgang ein (möglicherweise unbeabsichtigter) Verlust von Dynamik und Bildinformation verbunden ist.

Farbhistogramme unterscheiden sich in der Farbrepräsentation, für die sie berechnet werden. Bei 24-Bit-Darstellungen, wie beispielsweise für das RGB- oder das HSV-Farbmodell, wäre ein entsprechendes Histogramm 2^{24} Einträge groß. Für eine sinnvolle Anwendung ist ein Histogramm dieser Größe ungeeignet. Aus diesem Grund werden Farbhistogramme oftmals für zwei der drei Kanäle aufgestellt. Insbesondere das RG-Histogramm und das HS-Histogramm sind oft verwendete Varianten. Am Beispiel des HS-Histogramms ist ein zweidimensionales Histogramm wie folgt definiert: $H(x,y) = \text{card}\{(u,v) \mid x=h \wedge y=s, (h,s,v) \leftarrow I(u,v)\}$.

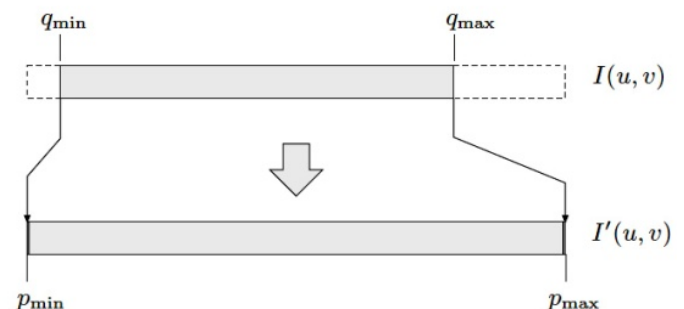
Histogrammnormalisierung

Die Histogrammnormalisierung (Histogrammspreizung) ist eine effektive Methode, den Kontrast eines Graustufenbildes automatisch zu erhöhen. Ziel der automatischen Kontrastanpassung ist es, die Pixelwerte eines Bilds so zu verändern, dass der gesamte verfügbare Wertebereich abgedeckt wird. Dazu wird das aktuell dunkelste Pixel auf den niedrigsten und das aktuell hellste Pixel auf den höchsten Intensitätswert abgebildet und alle dazwischenliegenden Pixelwerte linear verteilt. Nehmen wir an, $q_{\min}$ und $q_{\max}$ ist der aktuell kleinste bzw. größte Pixelwert in einem Bild $I(u,v)$, das über einen maximalen Intensitätsbereich $[0,q]$ verfügt (z.B. $q=255$). Zunächst werden im gegebenen Graustufenbild I die minimale Intensität $q_{\min}$ und die maximale Intensität $q_{\max}$ bestimmt. Anschließend wird im Ausgabebild I' mit der folgenden Funktion das Intervall $[q_{\min}, q_{\max}]$ auf das Intervall $[0,q]$ gespreizt:

$$I'(u,v) = q \cdot \frac{I(u,v) - q_{\min}}{q_{\max} - q_{\min}}$$

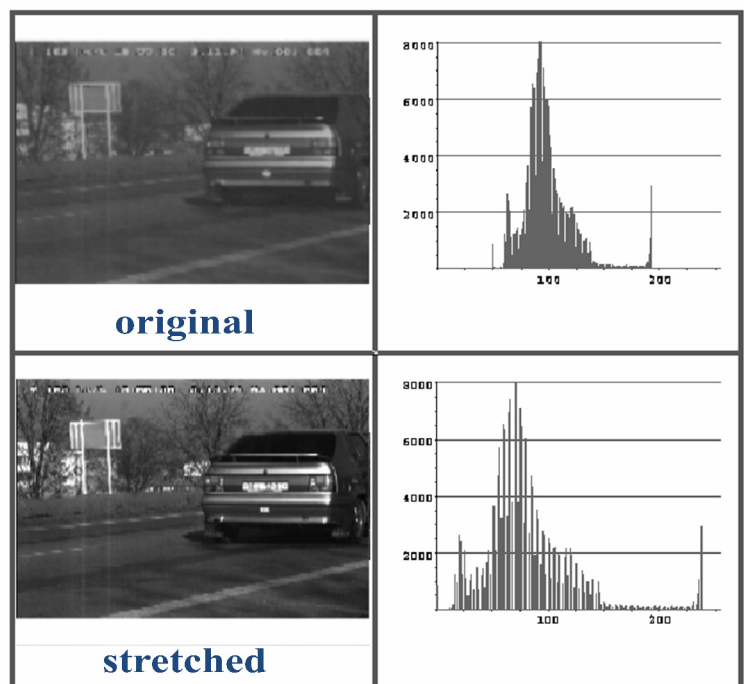
Dabei gilt es, vor der Spreizung auszuschließen, dass $q_{\min} = q_{\max}$ gilt, da es sich in diesem Fall um ein homogenes Bild handeln würde und sich daher nicht spreizen ließe. Der Bereich, auf den gespreizt werden soll, muss nicht dem Intervall $[0,q]$ entsprechen, sondern kann grundsätzlich ein beliebiger Kontrastbereich $[p_{\min}, p_{\max}]$ sein, den das Ergebnisbild abdecken soll:

$$I'(u,v) = (p_{\max} - p_{\min}) \cdot \frac{I(u,v) - q_{\min}}{q_{\max} - q_{\min}} + p_{\min}$$



Natürlich funktioniert die Methode auch dann, wenn der Kontrast auf einen kleineren Bereich reduziert werden soll.

Nebenstehende Abbildung zeigt die Auswirkungen einer Histogrammnormalisierung auf das zugehörige Histogramm, in dem die lineare Streckung des ursprünglichen Wertebereichs durch die regelmäßig angeordneten Lücken deutlich wird. Der Nachteil der Spreizung liegt in der geringen Robustheit gegenüber einzelner Ausreißer, begründet durch die Berechnung des Eingabebereichs $[q_{\min}, q_{\max}]$ anhand der minimalen und maximalen Intensität des Bildes. Bereits ein einziges Pixel mit der Intensität 0 und ein einziges Pixel mit der Intensität q reichen aus, um die Spreizung zur Identitätsfunktion ($a=1, b=0$) und somit wirkungslos werden zu lassen – auch wenn sich alle anderen Intensitäten in einem anderen Bereich befinden. Das lässt sich weitgehend vermeiden, indem man einen bestimmten Prozentsatz der Pixel am oberen und unteren Ende des Wertebereichs in "Sättigung" gehen lässt, d. h. auf die beiden Maximalwerte abbildet. Mathematisch



entspricht das der Verwendung von Quantilen, um die Werte q_{min} und q_{max} zu bestimmen. Als p -Quantil wird in der Statistik derjenige Wert bezeichnet, unterhalb dessen $p \cdot 100\%$ ($p \in [0,1]$) der Zufallswerte einer Verteilung liegen. Das Histogramm eines Bildes entspricht in der Statistik der Dichtefunktion, bis auf die Tatsache, dass ein Histogramm im Allgemeinen nicht die Summe Eins besitzt. Das Pendant zur Verteilungsfunktion ist folglich das akkumulierte Histogramm H_a , das für ein gegebenes Grauerthistogramm H wie folgt definiert ist:

$$H_a(x) = \sum_{k=0}^x H(k)$$

Übertragen auf ein Histogramm ist das p -Quantil derjenige Grauwert x , unterhalb dessen $p \cdot 100\%$ aller Grauwerte im Bild liegen. Die Histogrammdehnung ist eine Modifikation der Spreizung unter Verwendung der Berechnung von q_{min} und q_{max} mithilfe von Quantilen. In *Adobe Photoshop* bleiben z.B. 0.5% der Pixel an beiden Enden des Intensitätsbereichs bei der Autokontrast-Operation unberücksichtigt (0.005-Quantil). Histogrammnormalisierung wird in vielen Bildverarbeitungsprogrammen als Autokontrast bezeichnet.

Histogrammequalisierung

Ziel der Histogrammequalisierung (Histogrammausgleich, engl. *histogram equalization*) ist es, ein Bild durch eine homogene Punktoperation so zu verändern, dass das Ergebnisbild ein gleichförmig verteiltes Histogramm aufweist. Das kann bei diskreten Verteilungen natürlich nur angenähert werden, denn Punktoperationen können Histogrammeinträge nur verschieben oder zusammenfügen, nicht aber trennen. Insbesondere können dadurch einzelne Spitzen im Histogramm nicht entfernt werden und daher ist eine echte Gleichverteilung nicht zu erzielen. Man kann daher das Bild nur so weit verändern, dass das Ergebnis ein annähernd gleichverteiltes Histogramm aufweist. Im Unterschied zur Histogrammnormalisierung versucht die Histogrammequalisierung nicht in erster Linie das gesamte Histogramm bestmöglich zu spreizen, sondern Histogrammbereiche oft auftretender Grauwerte auseinander zu ziehen. Dies wird durch die Annäherung an ein gleichverteiltes Histogramm erzielt. Anders formuliert ist das Ziel, den Kontrast für stark vertretene Grauwertbereiche im Bild zu erhöhen, wohingegen die Histogrammnormalisierung den Kontrast ausschließlich für das gesamte Bild einheitlich zu erhöhen vermag. Die Histogrammequalisierung bedient sich ebenfalls des akkumulierten Grauerthistogramms H_a . Durch Division durch die Anzahl der Pixel des Bildes $H_a(q)$ und Multiplikation mit dem maximalen Grauwert q wird aus H_a das normalisierte, akkumulierte Histogramm H_n berechnet:

$$H_n(x) = \frac{q}{H_a(q)} \cdot H_a(x)$$

H_n dient als Lookup-Table (Umsetzungstabelle: die Werte einer Funktion werden vorab ermittelt und als Tabelle abgelegt) für die Neuordnung der Grauwerte. Der Ausgleich bewirkt, dass jedem Pixel mit Grauwert x der p -te Anteil des maximal kodierbaren Grauwerts q zugeordnet wird. Dabei bezeichnet p die relative Häufigkeit, mit der alle Grauwerte von 0 bis einschließlich x im Eingabebild vorkommen. Die Histogrammequalisierung ist - im Gegensatz zur Spreizung und Histogrammdehnung - keine affine Punktoperation. In der nebenstehenden Abbildung ist eine Histogrammequalisierung veranschaulicht. Im Gegensatz zur Histogrammnormalisierung sind die Lücken zwischen den Balken der Grauwerte nicht mehr gleichverteilt, sondern in Bereichen mit hoher Anzahl von Grauwerten im Eingabebild sind die Lücken größer als in Bereichen mit wenig Grauwerten. Das bewirkt eine Kontrastverstärkung bei den Maxima und eine Kontrastabschwächung bei den Minima, z.B. ist der Schatten der Bäume auf der Hausmauer dadurch besser erkennbar.

